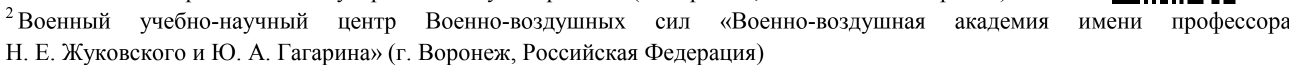
Advanced Engineering Research 2021. Т. 21, № 1. С. 22−31. ISSN 2687−1653

МЕХАНИКА
MECHANICS



УДК 539.377: 004.942 https://doi.org/10.23947/2687-1653-2021-21-1-22-31

Задача о толстостенной сферической оболочке

М. А. Артемов[1], Е. С. Барановский[1], А. А. Верлин[1], Э. В. Сёмка[2]
[1] ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет» (г. Воронеж, Российская Федерация)

[2] Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина» (г. Воронеж, Российская Федерация)

Введение. Цилиндрические и сферические оболочки широко используются в технике. Они подвергаются внутреннему и/или внешнему давлению и тепловому воздействию. Распределение напряжений и деформаций в упругопластических оболочках изучалось многими исследователями. Большинство работ связано с использованием условий пластичности Мизеса, максимального касательного, максимального приведённого напряжения. Эти условия не учитывают зависимость от первого инварианта тензора напряжений и знака третьего инварианта девиатора напряжений. Для тел со сферической и цилиндрической симметрией при осесимметричном тепловом и силовом воздействии в ряде случаев удается получить численно-аналитические решения для напряжений, перемещений и деформаций.
Материалы и методы. Решение задачи о состоянии толстостенной упругопластической оболочки проводится в рамках теории малых деформаций. Предложено условие пластичности, учитывающее зависимость от трех инвариантов тензора напряжений, а также знак третьего инварианта девиатора напряжений и трансляционное упрочнение материала. Решается несвязная термоупругопластическая задача. Для оценки напряжений в области упругого состояния сферической оболочки вводится эквивалентное напряжение, равное выбираемой функции пластичности. В качестве метода верификации напряженного состояния используется построение годографа вектора напряжений.
Результаты исследования. Для линейных функций пластичности задача имеет аналитическое решение. Получено решение, учитывающее упрочнение материала. Определены аналитические и графические зависимости между параметрами внешнего воздействия для упругого и упругопластического состояния шара. В случае комбинированной нагрузки возможны варианты, когда пластическая область зарождается на внутренней, внешней границах шара или между этими границами.
Обсуждение и заключения. Результаты вычислений показали, что учет пластической сжимаемости и зависимости предела пластичности от температуры может оказать существенное влияние на напряженное и деформированное состояние полого шара. При этом учет первого инварианта тензора напряжений в условии пластичности приводит к тому, что не только перепад давления между внешней и внутренней границами сферической оболочки, но и значения давлений на этих границах могут изменяться в ограниченном диапазоне. В данной постановке задачи, когда имеет место только тепловое воздействие, полый шар полностью не переходит в пластическое состояние. Результаты исследования позволяют прогнозировать поведение объекта (полого шара), испытывающего центрально-симметричные распределенные силовые и тепловые внешние воздействия.

Ключевые слова: полый шар, толстостенная сферическая оболочка, термоупругопластическое состояние, эквивалентное напряжение, ассоциированный закон пластического деформирования, годограф напряжений, параметры управления поведением модели.

Для цитирования: Задача о толстостенной сферической оболочке / М. А. Артемов, Е. С. Барановский, А. А. Верлин, Э. В. Сёмка // Advanced Engineering Research. — 2021. — Т. 21, № 1. — С. 22–31. https://doi.org/10.23947/2687-1653-2021-21-1-22-31

Thick-walled spherical shell problem

A. M. Artemov [1], E. S. Baranovskii [1], A. A. Verlin[1] E. V. Syomka[2]
[1] Voronezh State University (Voronezh, Russian Federation)
[2] Military Educational and Scientific Center of the Air Force “N.E. Zhukovsky and Y.A. Gagarin Air Force Academy” (Voronezh, Russian Federation)

Introduction. Cylindrical and spherical shells are extensively used in engineering. They face internal and/or external pressure and heat. Stresses and strains distribution in elastoplastic shells has been studied by many scientists. Numerous works involve the use of the von Mises yield conditions, maximum shear stress, maximum reduced stress. These conditions do not include the dependence on the first invariant of the stress tensor and the sign of the third invariant of the stress deviator. In some cases, it is possible to obtain numerical-analytical solutions for stresses, displacements and deformations for bodies with spherical and cylindrical symmetry under axisymmetric thermal and force action.
Materials and Methods. The problem on the state of a thick-walled elastoplastic shell is solved within the framework of the theory of small deformations. A plasticity condition is proposed, which takes into account the dependence of the stress tensor on three independent invariants, and also considers the sign of the third invariant of the stress deviator and translational hardening of the material. A disconnected thermoelastoplastic problem is being solved. To estimate the stresses in the region of the elastic state of a spherical shell, an equivalent stress is introduced, which is similar to the selected plasticity function. The construction of the stress vector hodograph is used as a method for verification of the stress state.
Results. The problem has an analytical solution for linear plasticity functions. A solution is obtained when the strengthening of the material is taken into account. Analytical and graphical relationships between the parameters of external action for the elastic or elastoplastic states of the sphere are determined. For a combined load, variants are possible when the plastic region is generated at the inner and outer boundaries of the sphere or between these boundaries.
Discussion and Conclusions. The calculation results have shown that taking into account the plastic compressibility and the dependence of the plastic limit on temperature can have a significant impact on the stress and strain state of a hollow sphere. In this case, taking into account the first invariant of the stress tensor under the plasticity condition leads to the fact that not only the pressure drop between the outer and inner boundaries of the spherical shell, but the pressure values at these boundaries, can vary within a limited range. In this formulation of the problem, when there is only thermal action, the hollow sphere does not completely pass into the plastic state. The research results provide predicting the behavior of an object (a hollow sphere) that experiences centrally symmetric distributed power and thermal external influences.

Keywords: hollow sphere, thick-walled spherical shell, thermoelastoplastic state, equivalent stress, associated plastic deformation law, stress hodograph, model behavior control parameters.

For citation: A. M. Artemov, E. S. Baranovskii, A. A. Verlin, et al. Thick-walled spherical shell problem. Advanced Engineering Research, 2021, vol. 21, no. 1, p. 22–31. https://doi.org/10.23947/2687-1653-2021-21-1-22-31

Введение. Решение задачи о толстостенной сферической оболочке, испытывающей разные внешние воздействия, приводится в монографиях [1, 2] и ряде научных статей по теории упругости, пластичности, термоупругопластичности [3–9]. Обычно рассматривается случай, когда процесс нагружения является простым.

Задача о толстостенной сферической оболочке является одной из простейших упругопластических задач, когда поля внешних воздействий и внутренних параметров обладают центральной симметрией. В силу центральной симметрии в пластической области выполняется режим полной пластичности. Для идеального пластического тела задача статически определимая, что позволяет ее решить для любых условий пластичности. В монографии [1] приведено наиболее полное решение задачи о сферической оболочке, когда не учитывается зависимость предела пластичности от температуры, а условие пластичности не зависит от первого инварианта тензора напряжений и знака третьего инварианта девиатора напряжений. Рассматриваются случаи только теплового и комбинированного нагружения, когда задана температура на стенках сферы, давление на внутренние стенки, а на внешней стенке давление отсутствует. В работах [10–13] выполнено исследование термоупругопластического состояния разных объектов, а в [3–9] рассмотрен процесс теплового нагружения и разгрузки свободного от внешних усилий шара и полого шара для условия Треска с учетом зависимости предела пластичности от температуры. Решение этой и аналогичных задач представляет интерес, поскольку можно получить аналитическое или частично аналитическое решение для разных математических моделей. Аналитическое решение можно получить при выборе кусочно-линейных функций пластичности [11, 13]. Математическое моделирование объектов позволяет прогнозировать их состояние и поведение в зависимости от значений исходных параметров [14, 15].

Материалы и методы. Постановка задачи. Рассматривается задача о толстостенной сферической оболочке (полом шаре), испытывающей центрально симметричные внешние воздействия: давление p_b на внешнюю стенку при $\rho = b$ и давление p_a на внутреннюю стенку при $\rho = a$. Также рассматривается тепловое воздействие на шар: на границе $\rho = a$ поддерживается температура T_a, на границе $\rho = b$ — температура T_b. Предполагается, что шар проявляет упругие и пластические свойства. Искомыми параметрами состояния в каждой точке шара являются компоненты тензора напряжений, компоненты тензоров деформаций и векторы перемещений. В области упругого состояния упругие деформации являются полными (остаточные деформации отсутствуют).

Основные соотношения. Все соотношения приведены к безразмерному виду. В качестве масштаба длины выбирается внешний радиус шара b. Все величины, имеющие размерность напряжений, отнесены к пределу пластичности при одноосном растяжении k. Масштабная единица для температуры — 1 С.

В силу указанной симметрии внешних воздействий, в сферической системе координат ρ, θ, ϕ матрицы компонент тензора напряжений и деформаций будут иметь вид:

$$(\sigma) = \begin{pmatrix} \sigma_\rho & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\theta & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\phi \end{pmatrix}, \quad (\varepsilon) = \begin{pmatrix} \varepsilon_\rho & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_\theta & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_\phi \end{pmatrix}.$$

В данном случае выполняются равенства $\sigma_\theta = \sigma_\phi$, $\varepsilon_\theta = \varepsilon_\phi$.

Если функции пластичности не зависят от первого инварианта тензора напряжений и знака третьего инварианта девиатора напряжений, то при решении задачи о шаре функции пластичности будут приводиться к виду:

$$f = |\sigma_\theta - \sigma_\rho| = k. \tag{1}$$

Рассмотрим условие пластичности:

$$f(\sigma_\rho, \sigma_\theta, \varepsilon_\rho^p, \varepsilon_\theta^p) = \frac{\varsigma((\sigma_\rho - \delta\varepsilon_\rho^p)^w + 2(\sigma_\theta - \delta\varepsilon_\theta^p)^w)^{\frac{1}{w}}}{\varsigma + \eta(1+\alpha)^{1/m}} + \\ + \frac{\eta((|\sigma_\theta - \sigma_\rho - \delta(\varepsilon_\theta^p - \varepsilon_\rho^p)|^m + \alpha(\sigma_\rho - \sigma_\theta - \delta(\varepsilon_\rho^p - \varepsilon_\theta^p)^m)^{\frac{1}{m}}}{\varsigma + \eta(1+\alpha)^{1/m}} = k(T), \tag{2}$$

где ε_ρ^p, ε_θ^p — компоненты тензора пластических деформаций; T — температура.

Когда параметры имеют значения: $\varsigma = 0, \eta = 1, \delta = 0, \alpha = 0, m = 1, \mu = 0, k = k_0$, из условия (2) следует условие (1). На рис. 1 в плоскости $\sigma_\rho, \sigma_\theta$ представлены кривые пластичности, определяемые по формуле (2) для разных значений числовых коэффициентов в функции пластичности.

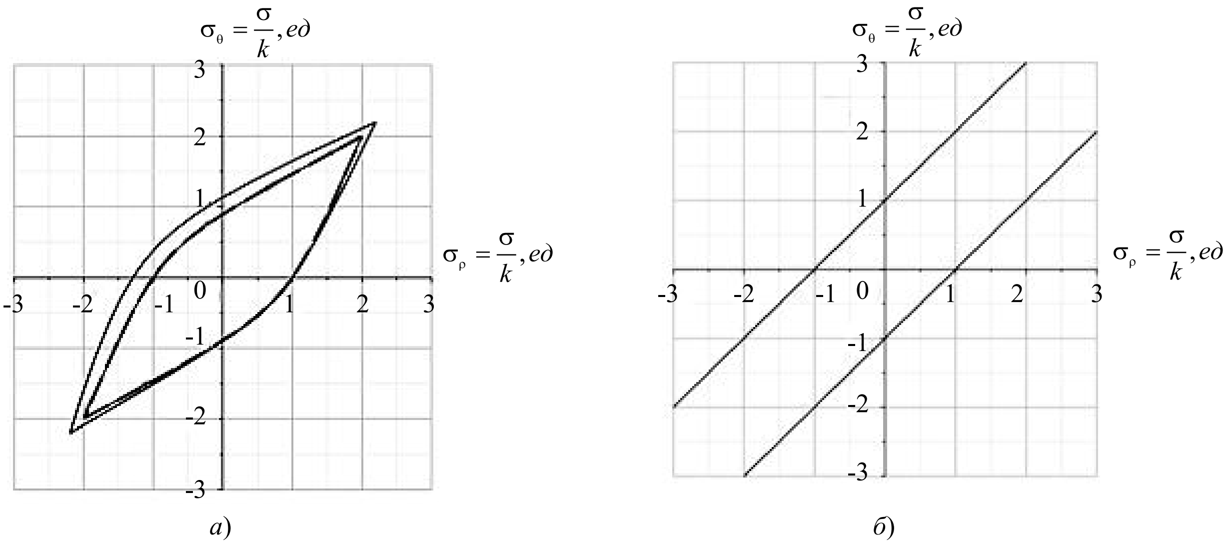


Рис. 1. Кривые пластичности: *а* — для параметров: $\varsigma = 0,2;\ w = 2;\ \eta = 0,5;\ \delta = 0;\ m = 3;\ k = 1$; сплошная линия $\alpha = 0,5$; пунктирная линия $\alpha = 0$; *б* — для параметров: $\alpha = 0;\ \varsigma = 0;\ \delta = 0;\ k = 1$

Результаты, представленные на рис. 1, показывают, что при учете первого инварианта тензора напряжений радиальное и окружное напряжения, когда точка шара находится в упругом состоянии, могут изменяться в ограниченном диапазоне. Соответственно давление на границы шара также должно быть ограниченным. Когда первый инвариант в условии пластичности не учитывается, упругое состояние возможно для любого значения давления на границах шара, но ограничен перепад давления $\Delta p = p_a - p_b$. Учет знака третьего инварианта девиатора напряжений, как отмечалось выше, влияет на значения пределов пластичности.

Если значения параметров состояния $\sigma_\rho, \sigma_\theta$ определяют точку области, ограниченную кривой пластичности, принимается, что определяющими уравнениями, связывающими напряжения и деформации, являются соотношения закона Дюамеля-Неймана [1, 2]:

$$E\varepsilon_\theta = (1-\nu)\sigma_\theta - \nu\sigma_\rho + E\alpha T, \quad E\varepsilon_\rho = \sigma_\rho - 2\nu\sigma_\theta + E\alpha T, \tag{3}$$

где модуль Юнга E и коэффициент Пуассона ν — константы.

Если параметры состояния $\sigma_\rho, \sigma_\theta$ определяют точки на кривой пластичности, то принимается аддитивное представление полных деформаций через обратимые и необратимые деформации:

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_\theta^e + \varepsilon_\theta^p, \quad \varepsilon_\rho = \varepsilon_\rho^e + \varepsilon_\rho^p. \tag{4}$$

Полные деформации определяются через перемещения по формулам:

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{\rho}, \quad \varepsilon_\rho = \frac{du}{d\rho}. \tag{5}$$

Полные деформации связаны условием совместности деформаций:

$$r\frac{d\varepsilon_\theta}{dr} + \varepsilon_\theta - \varepsilon_\rho = 0. \tag{6}$$

Приращения необратимых деформаций связаны с напряжениями нормальным законом:

$$\frac{d\varepsilon_\theta^p}{\partial f / \partial\sigma_\theta} = \frac{d\varepsilon_\rho^p}{\partial f / \partial\sigma_\rho}. \tag{7}$$

Соотношение (7) при выборе нелинейных функций пластичности в общем случае неинтегрируемое [16]. В квазистатическом приближении напряжения должны удовлетворять уравнению равновесия:

$$\rho\frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + 2(\sigma_\rho - \sigma_\theta) = 0. \tag{8}$$

Эквивалентное напряжение. Эквивалентное напряжение — это выпуклые изотропные скалярные функции тензора напряжений. В частных случаях термин «эквивалентное напряжение» является синонимом других терминов, например, «интенсивность напряжений» [17]. В настоящей работе эквивалентное напряжение совпадает с функцией пластичности. В этом случае на упругопластической границе эквивалентное напряжение не будет иметь разрыва.

Поле температур. Поле температур в шаре находится из решения краевой задачи [1]:

$$\begin{cases} \rho\dfrac{d^2T}{d\rho^2} + 2\dfrac{dT}{d\rho} = 0, \\ T|_{\rho=a} = T_a, \ T|_{\rho=b} = T_b. \end{cases} \tag{9}$$

Решение задачи (9) представим в виде:

$$T = T_b + \frac{a\Delta T}{(b-a)}\left(\frac{b}{\rho} - 1\right), \Delta T = T_a - T_b. \tag{10}$$

Упругая область. В области упругого состояния полого шара формулы для напряжений имеют вид:

$$\sigma_\rho = A + \frac{B}{\rho^3} - \frac{\lambda}{\rho}, \quad \sigma_\theta = A - \frac{B}{2\rho^3} - \frac{\lambda}{2\rho}, \quad \lambda = \frac{abE\alpha\Delta T}{(1-\nu)(b-a)}.$$

Пластическая область. Выберем условия (1). Рассмотрим случай только теплового воздействия (10). Тогда пластическая область будет зарождаться на внутренней границе оболочки при условии [1]:

$$\beta = \frac{E\alpha}{(1-\nu)}|\Delta T| = \beta_1 = \frac{2(a^2 + ab + b^2)k}{b(a+2b)}.$$

Обозначим через c_1 — радиус упругопластической границы $\rho = c_1$. В процессе нагружения, когда $\beta > \beta_1$, пластическая область $a \le \rho \le c_1$ увеличивается. При выборе условия (1) напряжения в области $a \le \rho \le c_1$ вычисляются по формулам:

$$\sigma_\rho^{(1)} = 2\kappa_1 k \ln(\rho / a), \quad \sigma_\theta^{(1)} = \sigma_\rho^{(1)} + \kappa_1 k, \quad \kappa_1 = sign(\sigma_\theta - \sigma_\rho),$$

где $\kappa_1 = sign(\sigma_\theta - \sigma_\rho)|_{\rho=c_1}$. Если $\Delta T > 0$, то $\kappa_1 = -1$, если $\Delta T < 0$, то $\kappa_1 = +1$.

Если область $c_1 \le \rho \le b$ остается упругой, то величины A, B и радиус упругопластической границы c_1 определяются из условий непрерывности напряжений на упругопластической границе и граничного условия $\sigma|_{\rho=b} = 0$. Так, если A и B определяются только из условий непрерывности напряжений на упругопластической границе, то имеют место выражения:

$$A = 2\kappa_1 k\left(\ln\left(\frac{c_1}{a}\right) + \frac{1}{3}\right) + \frac{\lambda}{3c_1}, \quad B = \frac{\lambda c_1^2}{3} - \frac{2}{3}\kappa_1 k c_1^3. \tag{11}$$

Уравнение для вычисления c_1 будет иметь вид:

$$2\kappa_1 k\left(\ln\left(\frac{c_1}{a}\right) + \frac{1}{3} - \frac{2c_1^3}{3b^3}\right) + \left(\frac{2}{3c_1} + \frac{c_1^2}{3b^3} - \frac{1}{b}\right)\lambda = 0. \tag{12}$$

Если A и B определяются из условий непрерывности напряжений на упругопластической границе и условия $\sigma|_{\rho=b} = 0$, то имеют место выражения:

$$A = \left(1 - \frac{c_1^2}{3b^2}\right)\frac{\lambda}{b} + \frac{2\kappa_1 k c_1^3}{3b^3}, \quad B = \frac{\lambda c_1^2}{3} - \frac{2}{3}\kappa_1 k c_1^3. \tag{13}$$

Выбор формул (11) или (13) влияет на шаги алгоритма решения задачи, но не влияет на окончательные результаты.

На границе $\rho = b$ будет зарождаться вторая пластическая область, если выполняется условие:

$$(\sigma_\theta - \sigma_\rho)|_{\rho=b} = \kappa_2 k, \ \kappa_2 = -\kappa_1. \tag{14}$$

Для определения значения $\Delta T = \Delta T_1$, когда выполняется условие (14), необходимо решить совместно систему уравнений (12), (14). Поскольку параметр β в уравнения (13) и (1) входит линейно, то можно получить отдельно уравнение для определения радиуса упругопластической границы:

$$2\kappa_1 k \ln\left(\frac{c_1}{a}\right) + \frac{4\kappa_1 k_0 (b - c_1)(c_1^2 - b^2)}{3(b + c_1)bc_1} = 0, \tag{15}$$

а также формулу для вычисления параметра β:

$$\beta = \beta_2 = \frac{2k_0(\kappa_2 b^3 - \kappa_1 c_1^3)(b - a)}{(b^2 - c_1^2)ab}. \tag{16}$$

В процессе дальнейшего нагружения, когда выполняется неравенство $\beta > \beta_2$, область шара $c_2 \le \rho \le b$ переходит в пластическое состояние на границе $\rho = b$.

Полый шар при тепловом воздействии. Учет упрочнения материала. Рассмотрим случай, когда условие пластичности имеет вид:

$$f(\sigma_\rho, \sigma_\theta, \varepsilon_\rho^p, \varepsilon_\theta^p) = |\sigma_\theta - \sigma_\rho - \delta(\varepsilon_\theta^p - \varepsilon_\rho^p)| = k. \tag{17}$$

Если до нагружения в шаре остаточные деформации отсутствуют, то в результате теплового нагрева пластическая зона будет зарождаться на внутренней границе $\rho = a$, когда выполняются условия (15), (16). При дальнейшем нагружении образуется пластическая область $a \le \rho \le c_1$. Для нахождения напряжений в этой области надо из системы уравнений (3–6), (8), (17) получить соответствующие уравнения:

$$\begin{cases} \rho^2 \dfrac{d^2\sigma_\rho}{d\rho^2} + 4\rho\dfrac{d\sigma_\rho}{d\rho} - \dfrac{6}{1 + 3\delta(1-\nu)}\left(k + \dfrac{\delta abE\alpha\Delta T}{\rho(b-a)}\right) = 0, \\ \sigma_\theta = \dfrac{\rho}{2}\dfrac{d\sigma_\rho}{d\rho} + \sigma_\rho. \end{cases} \tag{18}$$

Решение системы (18) запишем в виде:

$$\sigma_\rho = \frac{1}{1 + 3\delta(1-\nu)}\left(2k\ln\rho - \frac{3\delta abE\alpha\Delta T}{\rho(b-a)}\right) - \frac{C_1}{\rho^3} + C_2,$$
$$\sigma_\theta = \frac{1}{1 + 3\delta(1-\nu)}\left(k + 2k\ln\rho - \frac{3\delta abE\alpha\Delta T}{2\rho(b-a)}\right) + \frac{C_1}{2\rho^3} + C_2. \tag{19}$$

Величины C_1, C_2, входящие в формулы (19), определяются из граничного условия $\sigma_\rho\,|_{\rho=a}=0$ и условий отсутствия пластических деформаций на упругопластической границе $\rho=c_1$:

$$C_1 = 2\kappa_1(k-k_\delta)c_1^3 - 3E\alpha N_\delta c_1^2,$$
$$C_2 = 2\kappa_1 k_\delta \ln a + \frac{2\kappa_1(k-k_\delta)c_1^3}{3a^3} + \frac{E\alpha N_\delta}{a}\left(3-\frac{c_1^2}{a^2}\right), \qquad (20)$$
$$N_\delta = \frac{\delta ab\Delta T}{(1+3\delta(1-\nu))(b-a)}.$$

В результате подстановки (20) в (19) получим:

$$\sigma_\rho = \frac{1}{1+3\delta(1-\nu)}\left(2\kappa_1 k\ln\frac{\rho}{a} + \frac{3\delta abE\alpha\Delta T}{b-a}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{\rho}\right) - \right.$$
$$\left. -\left(\frac{2\kappa_1 kc_1^3}{3} + \frac{\delta abc_1^2E\alpha\Delta T}{b-a}\right)\left(\frac{1}{a^3}-\frac{1}{\rho^3}\right)\right) + \frac{2\kappa_1 kc_1^3}{3}\left(\frac{1}{a^3}-\frac{1}{\rho^3}\right),$$
$$\sigma_\theta = \frac{1}{1+3\delta(1-\nu)}\left(\kappa_1 k + 2\kappa_1 k\ln\frac{\rho}{a} + \frac{3\delta abE\alpha\Delta T}{b-a}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{2\rho}\right) - \right.$$
$$\left. -\left(\frac{\kappa_1 kc_1^3}{3} + \frac{\delta abc_1^2E\alpha\Delta T}{2(b-a)}\right)\left(\frac{2}{a^3}+\frac{1}{\rho^3}\right)\right) + \frac{\kappa_1 kc_1^3}{3}\left(\frac{2}{a^3}+\frac{1}{\rho^3}\right).$$

Из решения упругой задачи следует: если $\Delta T>0$, то $\kappa_1=-1$; если $\Delta T<0$, то $\kappa_1=+1$.

Учет пластической сжимаемости. Рассмотрим случай, когда функция пластичности является линейной относительно компонентов тензора напряжений:

$$\varsigma(2\sigma_\theta+\sigma_\rho) + \kappa(\sigma_\theta-\sigma_\rho) + \eta(\sigma_\theta-\sigma_\rho) = k_0(1-\chi T),$$
$$\kappa = sign(\sigma_\theta-\sigma_\rho). \qquad (21)$$

Условие пластичности (21) можно представить в виде:

$$\alpha\sigma_\theta+\beta\sigma_\rho = k(1-\chi T),$$
$$\alpha = 2\varsigma+\kappa-\eta,$$
$$\beta = \varsigma-\kappa+\eta.$$

С учетом введенных обозначений, для определения напряжений в пластической области получаем задачу:

$$\begin{cases} \alpha\sigma_\theta+\beta\sigma_\rho = k(1-\chi T), \\ \rho\dfrac{d\sigma_\rho}{d\rho} + 2(\sigma_\rho-\sigma_\theta) = 0, \\ \sigma_\rho\,|_{\rho=a} = -p_a. \end{cases} \qquad (22)$$

Решение задачи (22) имеет вид:

$$\sigma_\rho = \left(-p_a + \frac{(M_\chi-1)k_0}{\alpha+\beta} + \frac{2N_\chi k_0}{a(\alpha+2\beta)}\right)\left(\frac{a}{\rho}\right)^{2+2\beta/\alpha} - \left(\frac{M_\chi-1}{\alpha+\beta} + \frac{2N_\chi}{\rho(\alpha+2\beta)}\right)k_0,$$
$$\sigma_\theta = -\frac{\beta}{\alpha}\left(-p_a + \frac{(M_\chi-1)k_0}{\alpha+\beta} + \frac{2N_\chi k_0}{a(\alpha+2\beta)}\right)\left(\frac{a}{\rho}\right)^{2+2\beta/\alpha} - \left(\frac{M_\chi-1}{\alpha+\beta} + \frac{N_\chi}{\rho(\alpha+2\beta)}\right)k_0, \qquad (23)$$

где введены обозначения: $M = T_b - \dfrac{a\Delta T}{b-a}$, $N = \dfrac{ab\Delta T}{b-a}$, $M_\chi = \chi M$, $N_\chi = \chi N$.

Для получения правильного результата из (20), когда, например, $\alpha+\beta=0$, надо выполнить предельный переход при решении (22). Более просто получить правильный результат можно непосредственно в (23), при этом учесть, чтобы выполнялось условие $\alpha+\beta=0$. В этом случае $\varsigma=0$, поэтому получим:

$$\sigma_\rho = \frac{2k_0}{\alpha}\left((1-M_\chi)\ln\frac{\rho}{a} + \left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{a}\right)N_\chi\right) - p_a,$$
$$\sigma_\theta = \frac{k_0}{\alpha}\left((1-M_\chi)(1+\ln\frac{\rho}{a}) + N_\chi\left(\frac{1}{\rho}-\frac{2}{a}\right)\right) - p_a.$$

В процессе нагружения пластическая зона зарождается на границе $\rho=a$, когда выполняется условие:

$$\Delta T = k_0(1-\chi T_b)\Big/\left(k_0\chi - \frac{(2\varsigma+\kappa-\eta)(a+2b)bE\alpha}{2(1-\nu)(a^2+ab+b^2)}\right).$$

Результаты исследования. На рис. 2 приведены графики напряжений и годографов вектора напряжений, когда область шара, соответствующая условию $a \le \rho \le c_1$, находится в пластическом состоянии, а области шара, соответствующая условию $c_1 \le \rho \le b$, — в упругом состоянии.

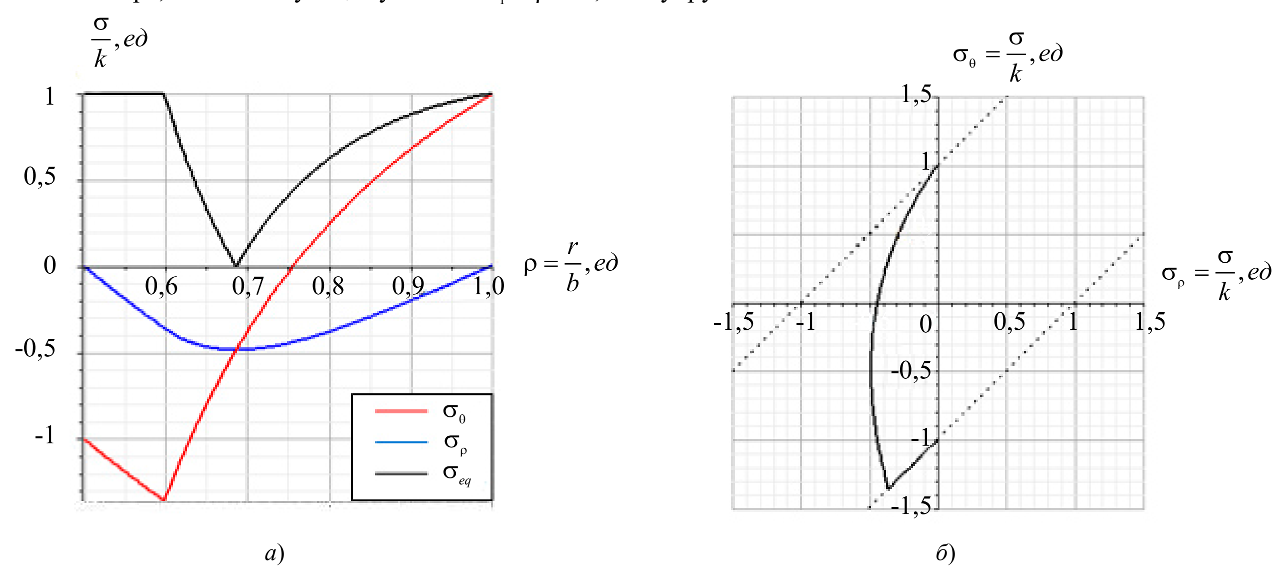


Рис. 2. Графики напряжений (*а*) и годографов вектора напряжений (*б*) при значениях параметров: $k = 1$; $\nu = 0{,}3$; $a = 0{,}5$; $b = 1$; $\Delta T = 170$; $c_1 = 0{,}57$

На рис. 3 приведены графики напряжений и годографов вектора напряжений, когда области шара, соответствующие условиям $a \le \rho \le c_1$ и $c_2 \le \rho \le b$, находятся в пластическом состоянии, а область шара, соответствующая условию $c_1 \le \rho \le c_2$, — в упругом состоянии.

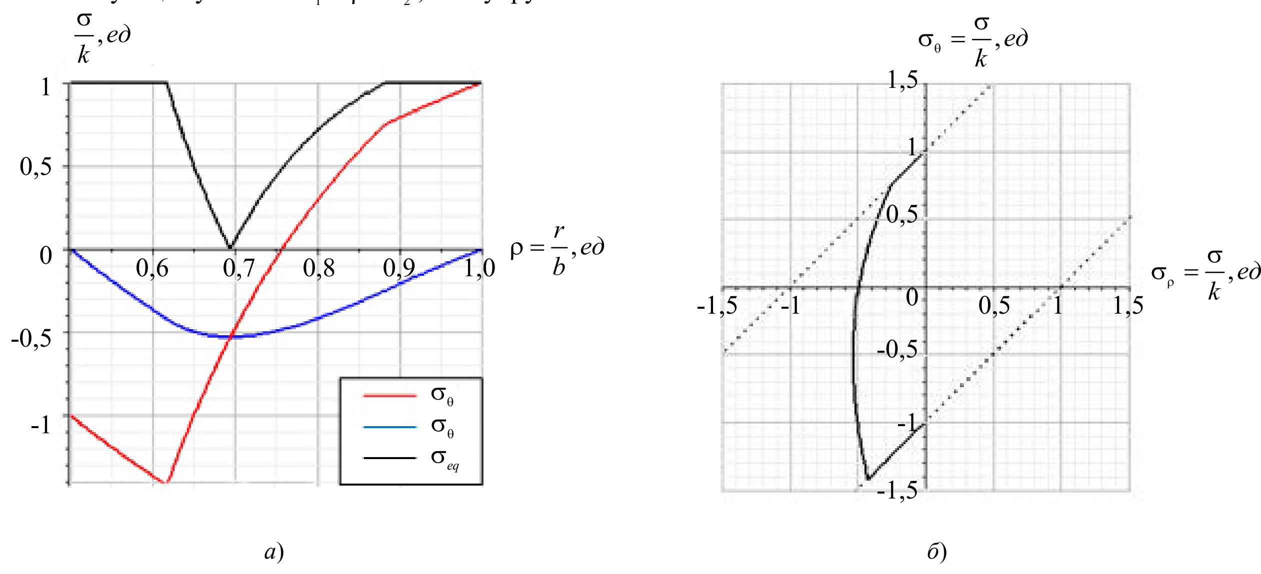


Рис. 3. Графики напряжений (*а*) и годографов вектора напряжений (*б*) при значениях параметров: $\nu = 0{,}3$; $a = 0{,}5$; $\Delta T = 270$; $c_1 = 0{,}62$; $c_2 = 0{,}88$

На рис. 4 приведены графики напряжений и годографов вектора напряжений, когда область шара, соответствующая условию $a \le \rho \le c_1$, находится в пластическом состоянии, а область шара, соответствующая условию $c_1 \le \rho \le b$, — в упругом состоянии.

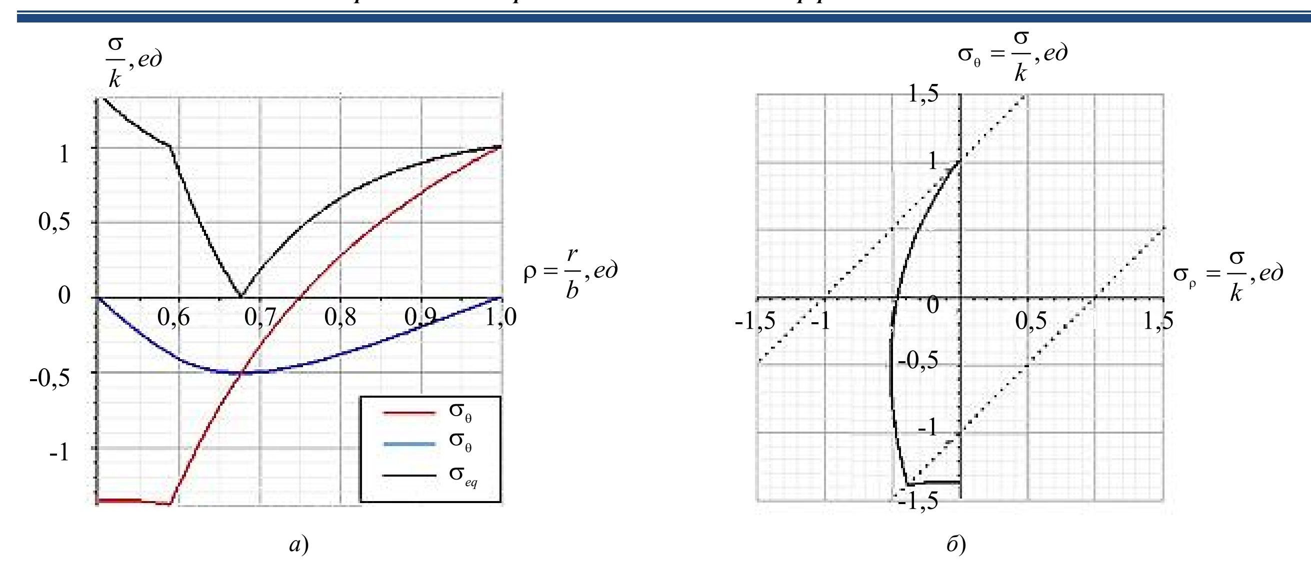


Рис. 4. Графики напряжений (*а*) и годографов вектора напряжений (*б*)
при значениях параметров: $\nu = 0,3$; $a = 0,5$; $\Delta T = 215$; $c_1 = 0,58$

На рис. 5 приведены графики напряжений и годографов вектора напряжений, когда области шара, соответствующие условиям $a \le \rho \le c_1$ и $c_2 \le \rho \le b$, находятся в пластическом состоянии, а область шара, соответствующая условию $c_1 \le \rho \le c_2$, — в упругом состоянии.

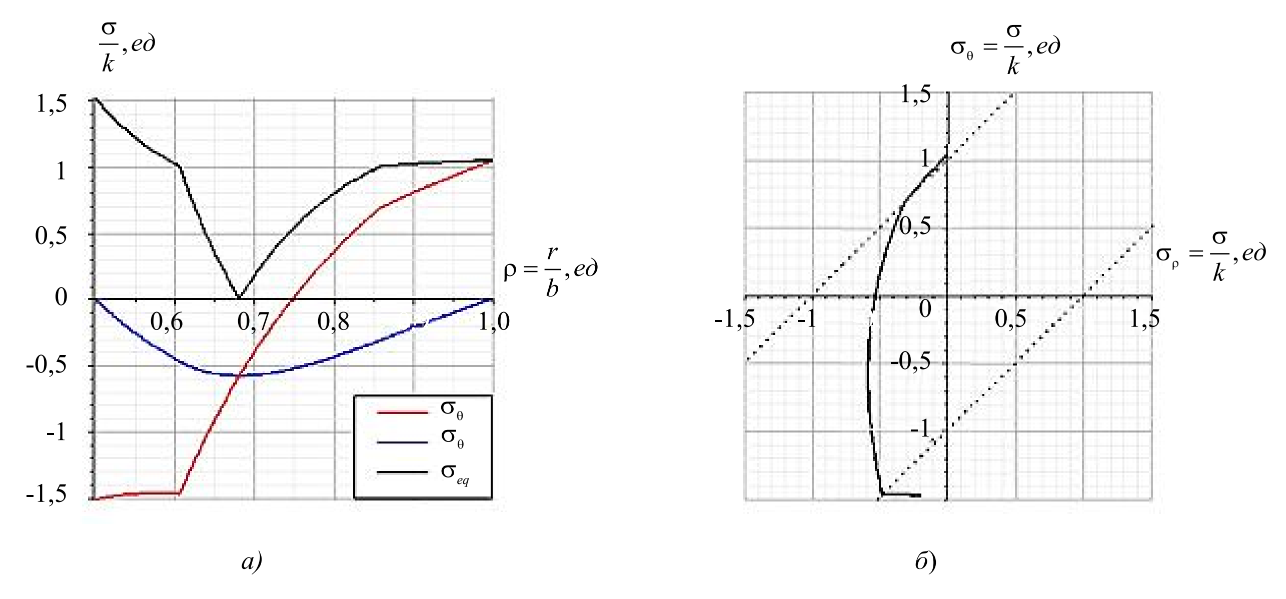


Рис. 5. Графики напряжений (*а*) и годографов вектора напряжений (*б*) при значениях параметров:
$\nu = 0,3$; $a = 0,5$; $\Delta T = 270$; $c_1 = 0,61$; $c_2 = 0,86$

На рис. 6 приведены графики напряжений и годографов вектора напряжений, когда области шара, соответствующие условиям $a \le \rho \le c_1$ и $c_2 \le \rho \le b$, находятся в пластическом состоянии, а область шара, соответствующая условию $c_1 \le \rho \le c_2$ — в упругом состоянии.

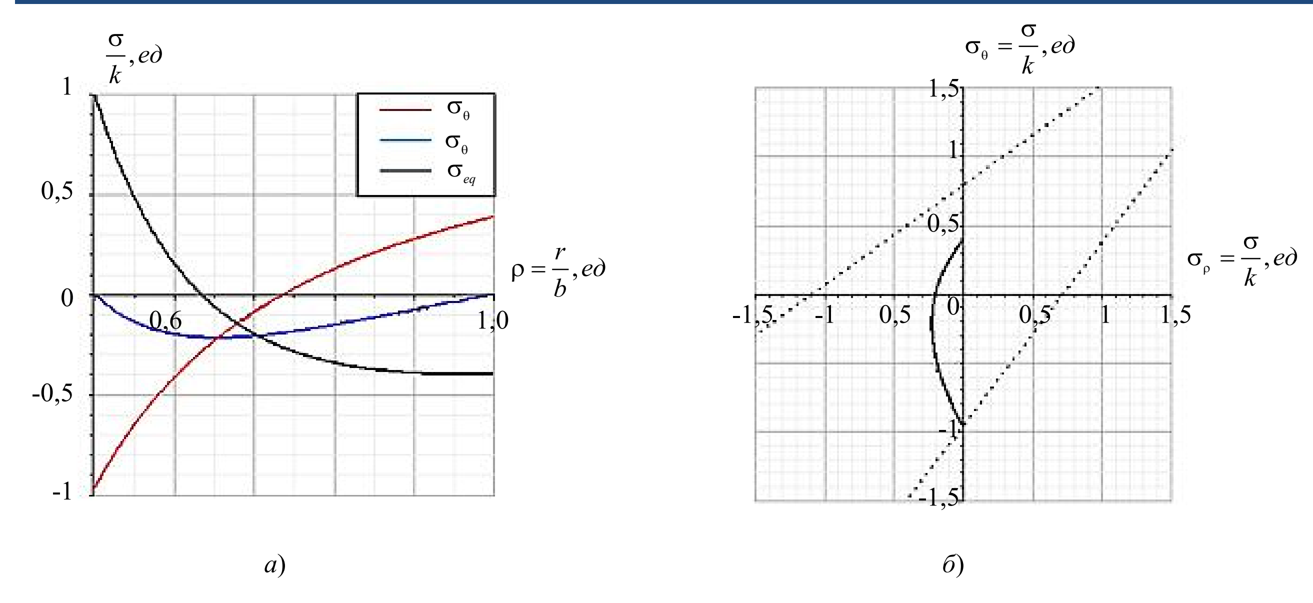


Рис. 6. Графики напряжений (*а*) и годографов вектора напряжений (*б*)
при значениях параметров: $\nu = 0,3;\ a = 0,5;\ \Delta T = 79;\ \varsigma = 0,1;\ \eta = 0,1;\ E\alpha = 0,012;\ \chi = 0,0017$

Обсуждение и заключения. Результаты вычислений показывают, что в данной постановке задачи, когда имеет место только тепловое воздействие, полый шар полностью не переходит в пластическое состояние (рис. 2–6). Упрочнение приводит к увеличению эквивалентного напряжения в пластической области и уменьшению радиуса упругопластической границы (рис. 4, 5). Упругая область в процессе нагружения не может полностью исчезнуть. Пластическая сжимаемость и зависимость предела пластичности от температуры оказывают существенное влияние на напряженное состояние полого шара (рис. 6).

Библиографический список

1. Chakrabarty, J. Theory of Plasticity / J. Chakrabarty. – Oxford : Elsevier Butterworth-Heinemann, 2006. — 882 p.

2. Паркус, Г. Неустановившиеся температурные напряжения / Г. Паркус. — Москва : Физматлит, 1963. — 252 с.

3. Gamer, U. On the elastic-plastic deformation of a sphere subjected to a spherically symmetrical temperature field / U. Gamer // Journal of Thermal Stresses. — 1988. — Vol. 11, iss. 3. — P. 159–173.

4. Дац, Е. П. Расчет накопленной остаточной деформации в процессе <нагрева-охлаждения> упругопластического шара / Е. П. Дац, С. Н. Мокрин, Е. В. Мурашкин // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. — 2012. — № 4. — С. 123–132.

5. Мурашкин, Е. В. Термоупругопластическое деформирование многослойного шара / Е. В. Мурашкин, Е. П. Дац, // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. — 2017. — № 5. — С. 30–36.

6. Дац, Е. П. Вычисление необратимых деформаций в полом упругопластическом шаре в условиях нестационарного температурного воздействия / Е. П. Дац, Е. В. Мурашкин, Р. Велмуруган // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. — 2015. — № 3. — С. 168–175.

7. Ковалев, А. В. Об определении напряжений и перемещений в упругом пространстве, ослабленном сферической полостью, с учетом температуры / А. В. Ковалев, И. Г. Хвостов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. — 2014. — № 2. — С. 29–35.

8. Burenin, A. A. Residual stresses in AM fabricated ball during a heating process / A. A. Burenin, E.V. Murashkin, E. P. Dats // AIP Conference Proceedings. — 2018. — Vol. 1959, iss. 1. — P. 070008. — DOI: https://doi.org/10.1063/1.5034683

9. Сёмка, Э. В. Упругопластическое состояние полого шара / Э. В. Сёмка // Вестник инженерной школы Дальневосточного федерального университета. Серия: Механика деформируемого тела. — 2020. — № 3. — С. 3–12.

10. Буренин, А. А. Кусочно-линейные пластические потенциалы как средство расчетов плоских неустановившихся температурных напряжений / А. А. Буренин, А. В. Ткачева // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. — 2020. — № 6. — С. 40–49.

11. Буренин, А. А. К использованию кусочно-линейных пластических потенциалов в нестационарной теории температурных напряжений / А. А. Буренин, А. В. Ткачева, Г. А. Щербатюк // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия : Физико-математические науки. — 2018. — Т. 22, № 1. — С. 23–39.

12. Температурные напряжения в упругопластической трубе в зависимости от выбора условия пластичности / Е. П. Дац, Е. В. Мурашкин, А. В. Ткачева, Г. А. Щербатюк // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. — 2018. — № 1. — С. 32–43.

13. Дац, Е. П. Температурные напряжения в условиях тороидальной симметрии / Е. П. Дац, Е. В. Мурашкин // Вестник Чувашского государственного педагогического университета имени И. Я. Яковлева. Серия : Механика предельного состояния. — 2019. — № 2. — С. 57–70.

14. Aleksandrova, N.N. On stress/strain state in a rotating disk / N.N. Aleksandrova, M.A. Artemov, E.S. Baranovskii [et al.] // AMCSM_2018 IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series. — 2019. — Vol. 1203. — Art. 012001. — DOI : http://doi.org/10.1088/1742-6596/1203/1/012001

15. Semka, E. V. Mathematical modeling of rotating disk states / E. V. Semka, M. A. Artemov, Y. N. Babkina [et al.] // In: Proc. Conf. 2019 Applied Mathematics, Computational Science and Mechanics: Current Problems. — Voronezh, Russian Federation. — 2020. — Vol. 1479. — P. 012122.

16. Ишлинский, А. Ю. Математическая теория пластичности / А. Ю. Ишлинский, Д. Д. Ивлев. — Москва : Физматлит, 2001. — 704 с.

17. Хан, Х. Теория упругости. Основы линейной теории и ее применение / Х. Хан. — Москва : Мир, 1988. — 343 с.

Сдана в редакцию 28.12.2020
Запланирована в номер 04.02.2021

Об авторах:

Артемов Михаил Анатольевич, заведующий кафедрой «Программное обеспечение и администрирование информационных систем» ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет» (394006, РФ, г. Воронеж, пл. Университетская, 1), доктор физико-математических наук, профессор. ResearcherID: O-1965-2015, ScopusID 6603631575, ORCID: http://orcid.org/0000-0001-8356-5418, artemov_m_a@mail.ru

Барановский Евгений Сергеевич, доцент кафедры «Программное обеспечение и администрирование информационных систем» ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет» (394006, РФ, г. Воронеж, пл. Университетская, 1), кандидат физико-математических наук, доцент, ResearcherID: L-6233-2016, ScopusID 36503487200, ORCID: http://orcid.org/0000-0002-1514-4475, esbaranovskii@gmail.com

Верлин Александр Андреевич, аспирант кафедры «Программное обеспечение и администрирование информационных систем» ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет» (394006, РФ, г. Воронеж, пл. Университетская, 1). ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9771-340X, alexandrverlin@mail.ru

Сёмка Элеонора Викторовна, преподаватель кафедры «Радиоэлектроника» Военного учебно-научного центра Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина (394064, РФ, г. Воронеж, ул. Старых Большевиков, 54 А), ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0194-6979, semka_elya@mail.ru

Заявленный вклад соавторов:

М. А. Артемов — формирование основной концепции, цели и задачи исследования, формирование выводов; Е. С. Барановский — научное руководство, доработка текста, корректировка выводов; А. А. Верлин — подготовка текста; Э. В. Сёмка — проведение расчетов, анализ результатов исследований.

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.